9класс алгебра 16.12. 2020

Тема: Решение неравенств методом интервалов

Классная работа (изучи и запиши в тетради)

Решим неравенство:

$$x^2 - 4x - 21 < 0$$

Чтобы решить такое неравенство, нужно рассмотреть функцию, решив ее, получим:

$$y = x^2 - 4x - 21$$

$$y = (x + 3)(x - 7)$$

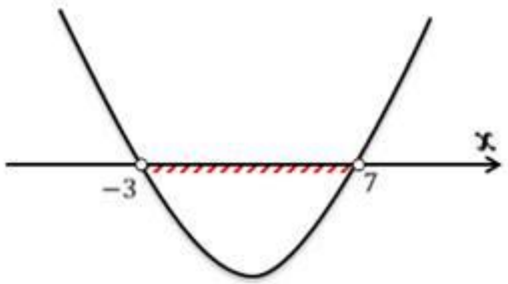
Задача сводится к нахождению промежутков знакопостоянства. Для этого необходимо найти нули функции:

$$(x + 3)(x - 7) = 0$$

$$x + 3 = 0 \qquad x - 7 = 0$$

$$x = -3 \qquad x = 7$$

Решением системы будет:



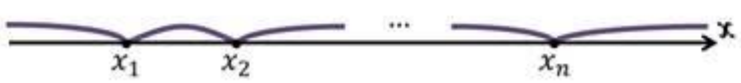
Можно ли использовать такой приём при наличии большего количества множителей? Хоть внешний вид графика нам будет неизвестен, но нули такой функции найти не трудно.

Найдём нули функции. Отметим их на оси икс:

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$$

$$x - x_1 = 0 \qquad x - x_2 = 0 \qquad \dots \qquad x - x_n = 0$$

$$x = x_1 \qquad x = x_2 \qquad \dots \qquad x = x_n$$



Они разбили числовую прямую на части. Как же разобраться со знаком функции на каждом промежутке. В правой части формулы, задающей функцию, записано произведение линейных множителей:

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ \dots (x - x_n)$$

Если вспомним график линейной функции, то станет понятно, что каждый линейный множитель меняет знак в своём нуле с + на - или наоборот, с минуса на плюс. Причём остальные множители свой знак менять не будут. Если изменится знак одного множителя в произведении, то и знак всего произведения тоже изменится.

<u>Свойство:</u>
В каждом из промежутков, на которые область определения разбивается нулями функции, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль её знак меняется.

Этим свойством и пользуются при решении неравенств, такой приём называют **методом интервалов**.
Пример.

Решить неравенство:

$$x(x-3)(x+4)(1-x) > 0$$

Преобразуем:

$$x(x-3)(x+4)(x-1) < 0$$

Знак неравенства поменялся, так как неравенство умножили на отрицательное число.

Рассмотрим соответствующую функцию и найдём её нули:

$$f(x) = x(x-3)(x+4)(x-1)$$

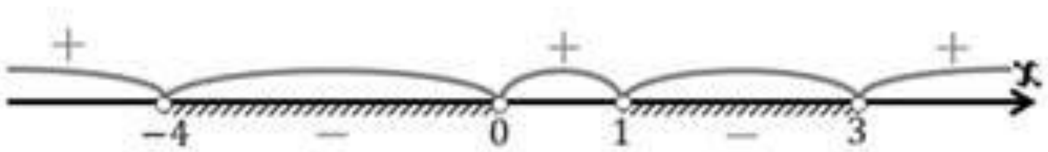
$$x(x-3)(x+4)(x-1) = 0$$

$$x = 0 \quad x - 3 = 0 \quad x + 4 = 0 \quad x - 1 = 0$$

$$x = 0 \quad x = 3 \quad x = -4 \quad x = 1$$

Вернёмся к неравенству. Его знак: строго меньше нуля. Значит, все точки изображённые на числовой прямой, являются выколотыми, ведь не допускается равенство нулю.

Эти значения разбили область определения на промежутки:



Для того чтобы определим знак этой функции нужно в функцию подставить значение из этого промежутка.

Решением неравенства будет:

$(-4; 0) \cup (1; 3)$

Пример.

Решить неравенство:

$\left(x - \frac{1}{3}\right)(5x + 6)(x - 8) \geq 0$

Приведём левую часть неравенства к виду:

$5\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1{,}2)(x - 8) \geq 0$
$\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1{,}2)(x - 8) \geq 0$

Рассмотрим соответствующую функцию и найдём её нули:

$f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 1{,}2)(x - 8)$

$x = \frac{1}{3}$ $\quad$ $x = -1{,}2$ $\quad$ $x = 8$

Отметим их на числовой прямой:

Область определения разбили на промежутки. Определили знаки функции. Вернёмся к неравенству, так как его знак ≥0. Допускается равенство нулю, поэтому точки будут закрашенными.

Решением данного неравенства будет:

$\left[-1{,}2; \frac{1}{3}\right] \cup [8; +\infty).$

Пример.

Решить неравенство:

$$\frac{11-x}{x+6} > 0$$

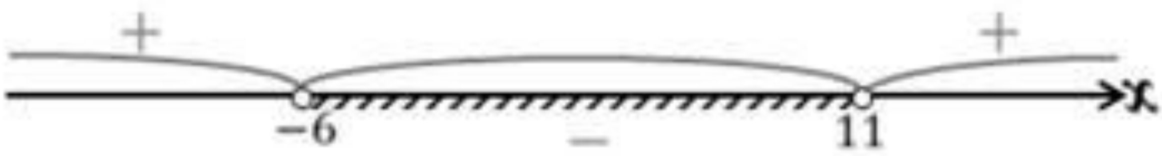
Так как знак этой дроби совпадает со знаком ее произведения, перейдем к решению неравенства:

$$(11-x)(x+6) > 0$$
$$(x-11)(x+6) < 0$$

Найдем нули функции:

$$f(x) = (x-11)(x+6):$$
$$x = 11 \quad x = -6$$

Отметим их на числовой прямой:



Решение данного неравенства:

$(-6; 11)$.

Пример.

Решить неравенство:

$$\frac{15-x}{10x-3} \leq 0$$

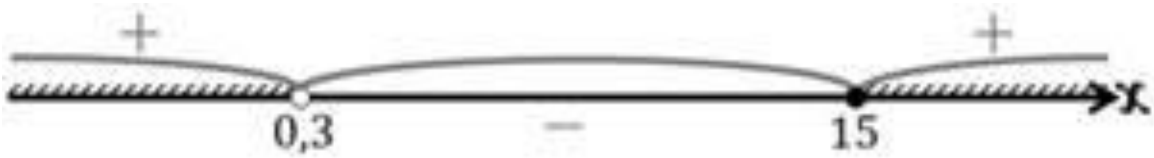
Перейдём к произведению:

$$(15-x)(10x-3) \leq 0$$
$$-10(x-15)(x-0{,}3) \leq 0$$
$$(x-15)(x-0{,}3) \geq 0$$

Найдём нули функции:

$$f(x) = (x-15)(x-0{,}3)$$
$$x = 15 \quad x = 0{,}3$$

Определим их:



Решением данного неравенства будет:

$(-\infty; 0{,}3) \cup [15; +\infty)$

Пример.

Решить неравенство:

$(x^2 - 4x + 4)(x - 1)(x + 5) > 0$

Преобразуем неравенство:

$(x - 2)^2(x - 1)(x + 5) > 0$

$(x - 2)(x - 2)(x - 1)(x + 5) > 0$

Найдем нули функции и отметим их на числовой прямой:

$f(x) = (x - 2)(x - 2)(x - 1)(x + 5)$

$x = 2 \quad x = 2 \quad x = 1 \quad x = -5$

Если нуль функции имеет чётную кратность, то при переходе через этот нуль функция сохраняет знак. Если же нуль функции имеет нечётную кратность, то при переходе через этот нуль функция меняет знак.

Решением данного неравенства будет:

$(-\infty; -5) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Для закрепления материала посмотреть видеоурок и презентацию

https://www.youtube.com/watch?v=qcj87Iy3V0I&feature=emb_logo

Предлагаю пройти в онлайн-режиме тренировочный тест по ссылке https://resh.edu.ru/subject/lesson/1996/train/#155407

Ваша задача выполнить задания и прислать скрин с вашим результатом.

Домашнее задание.

1.Прочитать п. 15, выучить алгоритм решения неравенств методом интервалов . Решить

Решите неравенство:

а) (x-3) 8-x)≥ 0 ;

б) (x+8)(3-x)(1,5-x)<0;

в) 4(x+3) (x-2)>0

г) $\frac{x+1}{3-x} \geq 0$;

д) x(x+4)(x-9)≤ 0 ;

ж) $\frac{6x+2}{x}$ >2.